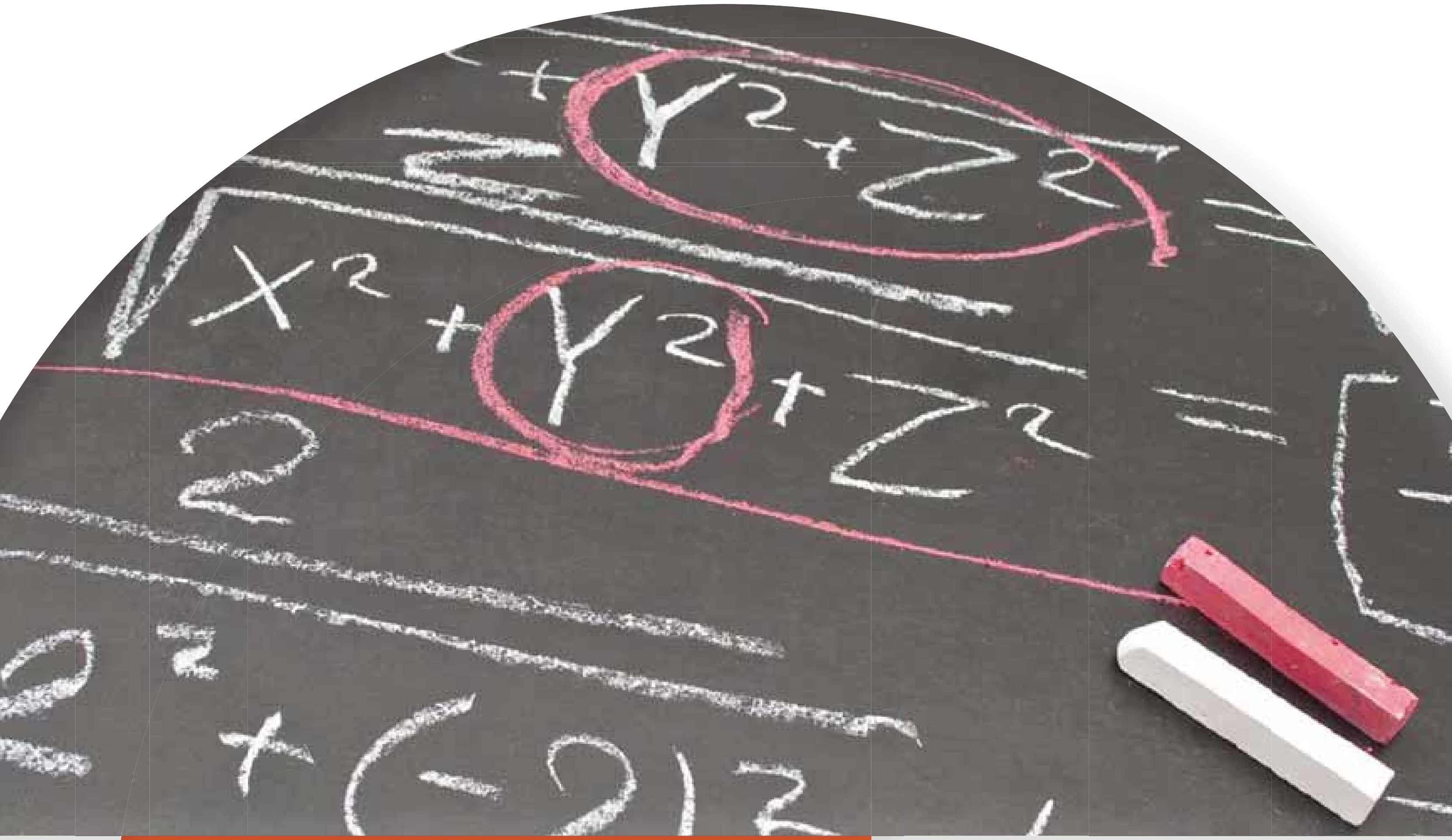


Unidad 4

Expresiones algebraicas y polinomios

SUMARIO

- Monomios y polinomios
- Suma y resta de polinomios
- Producto de polinomios
- Sacar factor común de un polinomio
- Identidades notables
- División de polinomios

TAREAS POR COMPETENCIAS

- Calculos con coeficientes

TÉCNICA DE TRABAJO

- Calcular la dosis de medicamentos para niños

1 » Expresiones algebraicas

Cuando se presenta una situación problemática en la que es necesario recurrir a las matemáticas para solucionarla, esta se expresa mediante un lenguaje más preciso y objetivo que el habitual donde los datos desconocidos se representarán por letras.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y operaciones matemáticas básicas, como son la suma, la resta, la multiplicación y la división (Ejemplo 1).

Ejemplo 1

- Si x es el precio de 1 kg de manzanas, $2x$ será el precio de 2 kg de manzanas.
- Si la medida de la base de un rectángulo es x, y la medida de la altura, y, xy es el área del rectángulo.

1.1 › Monomios y polinomios

Un **monomio** es la expresión algebraica más sencilla, formada por una parte numérica llamada **coeficiente** y por una **parte literal,** que puede contener una o varias variables.

Entre las variables que forman la parte literal de cada monomio solo están permitidas las operaciones de **producto** y **potencia** de **exponente** de un número **natural.**

El **grado** de un monomio es la suma de todos los exponentes de su parte literal (Ejemplo 2).

El **valor numérico** de un monomio se obtiene reemplazando las letras por números y luego resolviendo las operaciones (Ejemplo 3).

Dos **monomios** son **semejantes** si tienen la misma parte literal (Ejemplo 4).

Para **sumar o restar monomios** se suman o restan los coeficientes de monomios semejantes.

Para **multiplicar monomios** se multiplican los coeficientes y las partes literales.

Para **dividir monomios** se dividen los coeficientes y las partes literales (Ejemplo 5).

Ejemplo 2

- $5x^{-1}$ no es monomio.
- $-x^3$ es un monomio de grado 3, coeficiente -1 y parte literal x^3.
- $5xy$ es un monomio de grado 2, coeficiente 5 y parte literal xy.

Ejemplo 3

- El valor numérico de $3 \cdot x^2$, para $x = 4$, es: $3 \cdot 4^2 = 48$.
- El valor numérico de $-xy^3$, para $x = 2$ e $y = 3$, es:
  $-1 \cdot 2 \cdot 3^3 = -2 \cdot 27 = -54$

Ejemplo 4

- $5xy^2$ y $4y^2x$ son monomios semejantes de grado 3 porque su parte literal es igual.

Ejemplo 5

- Suma y resta de monomios:
  $x + 2x = 3x$
  $5x^2 - 4x^2 = x^2$
- Multiplicación de monomios:
  $2x^3 \cdot 6x = 12x^4$
  $(2ab^4c) \cdot (5ab^2d^4) = 10a^2b^6cd^4$
- División de monomios:
  $24x^3 : 3x = \dfrac{24x^3}{3x} = 8x^2$
  $\dfrac{6x^3y^5z^2}{16x^2y^5z} = \dfrac{3}{8}xz$

Actividades

1. Copia en tu cuaderno y expresa algebraicamente los siguientes enunciados:

a) El doble de un número.
b) Cinco años menos que la edad de su hermano.
c) La tercera parte del producto de dos números.
d) El perímetro de un rectángulo.

2. Copia en tu cuaderno estos monomios y señala su coeficiente, su parte literal y su grado:

a) $2a^4bc^3$ b) x^3y^2 c) $\dfrac{x^2y}{3}$ d) $x\dfrac{y^3}{5}$

3. Copia en tu cuaderno y realiza las siguientes operaciones:

a) $4x + 7x$ b) $5a - 9a$ c) $2x^5y \cdot 5xy^2z$ d) $3x^3y^2 : xy^2$ e) $12x^3z^4 : 4xy^2z^3$

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de monomios. Cada uno de los monomios que forma un polinomio se denomina **término** del polinomio.

Tomando como variable de un polinomio la letra x, la forma general que tiene es:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde a_k son los coeficientes

– El coeficiente del término de mayor grado, a_n, es el coeficiente principal.
– El coeficiente del término de menor grado, a_0, es el término independiente.

El **grado** de un polinomio es el mayor exponente de la variable x con coeficiente distinto de cero.

Un polinomio se llama como su grado. Si el coeficiente del término de mayor grado es 1, el **polinomio** se denomina **mónico** (Ejemplo 7).

Ejemplo 7

- $P(x) = 2x^5 + x^4 + x - 7$ es un polinomio de grado 5, coeficiente principal 2 y término independiente –7.
- $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 1$ es un polinomio mónico de grado 3 y término independiente 1.

Un **polinomio** es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio (Ejemplo 8).

Al sustituir la variable x por un valor determinado se obtiene el valor **numérico del polinomio** para ese valor determinado (Ejemplo 9).

Ejemplo 9

Sea el polinomio mónico $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$

– El valor numérico para $x = 1$ es: $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + 5 = 7$
– El valor numérico para $x = -3$ es: $P(-3) = (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - (-3) + 5 = -27 + 2 \cdot 9 + 3 + 5 = -1$
– El valor numérico para $x = 0$ es: $P(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 0 + 5 = 5$

Actividades

4. Copia y escribe para cada uno de los siguientes polinomios su grado y los monomios que lo constituyen:

a) $3x^4 + 5x^2 - x + 10$ b) $x^2 + 6x - 2x^3$ c) $-a^2 - 3a^5 + 4a + -1$

5. Escribe un polinomio mónico de grado 5 sin término independiente.

6. Escribe un polinomio completo de grado 4 y término independiente –2.

7. Copia en tu cuaderno y calcula los siguientes valores numéricos de este polinomio: $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$.

a) $P(0)$ b) $P(1)$ c) $P(-1)$ d) $P(-2)$ e) $P\left(\frac{1}{2}\right)$

Binomios y trinomios

Un **binomio** es un polinomio formado por dos términos.

Un **trinomio** es un polinomio formado por tres términos (Ejemplo 6).

Ejemplo 6

- Son ejemplos de binomios:
  $3xy^2 + x$
  $a^3 + 3ab^2$
- Son ejemplos de trinomios:
  $2x^2 + 5xy^3 + x$
  $a^2 + 2ab - 5$

Ejemplo 8

- $P(x) = 3x^2 + x - 1$ es un polinomio completo.
- $Q(x) = -3x^4 + x - 1$ no es un polinomio completo.

1.2 › Suma y resta de polinomios

Para **sumar polinomios** se suman entre sí los términos semejantes de ambos polinomios (Ejemplo 10).

Ejemplo 10

Dados los polinomios $P(x)=3x^3+2x-6$ y $Q(x)=-4x^3+3x^2-5x+1$

El polinomio suma es:

$S(x)=P(x)+Q(x)=(3x^3+2x-6)+(-4x^3+3x^2-5x+1)=$

$=3x^3+2x-6-4x^3+3x^2-5x+1=$

$=(3x^3-4x^3)+3x^2+(2x-5x)+(-6+1)=-x^3+3x^2-3x-5$

Ejemplo 11

Si $P(x)=2x^3-3x+1$, su polinomio opuesto es:

$-P(x)=-(2x^3-3x+1)=-2x^3+3x-1$

El **polinomio opuesto** de $P(x)$ es $-P(x)$ y se calcula cambiando el signo de los coeficientes (Ejemplo 11).

La **resta de polinomios** se realiza transformándola en una suma de polinomios utilizando el polinomio opuesto: $R(x) = P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$ (Ejemplo 12).

Ejemplo 12

El polinomio resta es:

$R(x)=P(x)-Q(x)=(3x^3+2x-6)-(-4x^3+3x^2-5x+1)=$

$=3x^3+2x-6+4x^3-3x^2+5x-1=$

$=(3x^3+4x^3)-3x^2+(2x+5x)+(-6-1)=7x^3-3x^2+7x-7$

Para hacer más fácil la suma o resta de polinomios se puede disponer un polinomio encima del otro haciendo coincidir los términos semejantes (Ejemplo 13).

Ejemplo 13

Dados los polinomios $P(x) = 5x^3 + 0x^2 + 4x - 3$ y $Q(x) = -2x^3 + 7x^2 + x - 2$:

La suma de los polinomios es:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x^3 & + & & + & 4x & - & 3 \\ -2x^3 & + & 7x^2 & + & x & - & 2 \\ \hline 3x^3 & + & 7x^2 & + & 5x & - & 5 \end{array}$$

La resta de los polinomios es:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x^3 & + & & + & 4x & - & 3 \\ +2x^3 & - & 7x^2 & - & x & + & 2 \\ \hline 7x^3 & - & 7x^2 & + & 3x & - & 1 \end{array}$$

Actividades

8. Copia y calcula las siguientes sumas de polinomios:

a) $(3x^2-x+1)+(2x+3)$

b) $(x^2+x+1)+(x^3-x+1)$

c) $(4x^2-x-1)+(x-5)$

d) $(x^2+1)+(x^2-3)$

e) $(x+2)\cdot(x^2-x-1)$

f) $(2+x)+(-x^2+3x+1)$

9. Copia en tu cuaderno los polinomios: $P(x) = 3x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 + 5$, $R(x) = 5x^3 - x^2 + x - 2$, $S(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x + 1$. Después, calcula el resultado de las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $R(x) - Q(x)$

c) $S(x) - P(x)$

d) $P(x) + Q(x) - S(x)$

1.3 › Producto de polinomios

Para **multiplicar dos polinomios *P*(*x*)** y ***Q*(*x*),** se multiplica el primer término del polinomio $P(x)$ por cada término de $Q(x)$, el segundo término de $P(x)$ por cada término $Q(x)$, y así tantas veces como términos tenga $P(x)$. Después, se opera reduciendo el polinomio producto.

El resultado de multiplicar dos polinomios es otro polinomio llamado **polinomio producto** (Ejemplo 15).

Ejemplo 15

- Producto de un monomio por un polinomio:
$$\left(2x^3\right)\cdot\left(-5x^2+3x\right)=\left(2x^3\right)\cdot\left(-5x^2\right)+\left(2x^3\right)\cdot(3x)=-10x^5+6x^4$$
- Producto de dos polinomios:
$$(3x+1)\cdot\left(4x^2+2x-1\right)=(3x)\cdot\left(4x^2+2x-1\right)+1\cdot\left(4x^2+2x-1\right)=$$
$$=12x^3+6x^2-3x+4x^2+2x-1=12x^3+10x^2-x-1$$

Para hacer más fácil el producto de polinomios, se puede disponer uno encima de otro, siguiendo el orden de la multiplicación de números enteros (Ejemplo 16).

Para calcular el **producto** de dos **polinomios no importa** el orden en el que se multipliquen, ya que $P(x)\cdot Q(x)=Q(x)\cdot P(x)$ (Ejemplo 17).

Para **multiplicar tres o más polinomios** basta hacerlo **agrupándolos** de dos en dos:

$$[\boldsymbol{P(x)}\cdot\boldsymbol{Q(x)}]\cdot R(x)=P(x)\cdot[\boldsymbol{Q(x)}\cdot\boldsymbol{R(x)}]$$ (Ejemplo 18)

Ejemplo 18

Para calcular $x^2\cdot(x-2)\cdot(x+3)$ se puede calcular $x^2\cdot(x-2)$ y el resultado se multiplica por $(x+3)$. O bien se multiplica x^2 por el resultado de operar $(x-2)\cdot(x+3)$.

$$\left[x^2\cdot(x-2)\right]\cdot(x+3)=\left(x^3-2x^2\right)\cdot(x+3)=x^4+3x^3-2x^3-6x^2=x^4+x^3-6x^2$$
$$x^2\cdot\left[(x-2)\cdot(x+3)\right]=x^2\cdot\left(x^2+3x-2x-6\right)=x^2\cdot\left(x^2+x-6\right)=x^4+x^3-6x^2$$

Producto

En una multiplicación, cada uno de los términos que se multiplican se denomina factor, y el resultado es el producto (Ejemplo 14).

Ejemplo 14

En la multiplicación $2\cdot 3=6$, 2 y 3 son factores y 6 es el producto.

Ejemplo 16

$$\begin{array}{rrrr}
 & 3x^2 & +\ 2x & -\ 1 \\
 & \times & 2x & +\ 1 \\
\hline
 & 3x^2 & +\ 2x & -\ 1 \\
6x^3 & +\ 4x^2 & 2x & \\
\hline
6x^3 & +\ 7x^2 & & -\ 1
\end{array}$$

Ejemplo 17

- $(x+4)\cdot(5-x)=5x-x^2+20-4x=$
$=-x^2+x+20$
- $(5-x)\cdot(x+4)=5x+20-x^2-4x=$
$=-x^2+x+20$

Actividades

10. Copia en tu cuaderno y calcula los siguientes productos:

a) $2x\cdot\left(x^2-3\right)$ c) $(x+5)\cdot(x-2)$ e) $\left(x^2+2\right)\cdot(x-3)$

b) $4x^2\cdot\left(x^3-x+1\right)$ d) $(x+2)\cdot\left(x^2-x-1\right)$ f) $(5+x)\cdot\left(x^2-2x+1\right)$

11. Copia en tu cuaderno y calcula los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2\cdot(x-1)\cdot(x+3)$ d) $x^3(x-2)\cdot\left(x^2-x-1\right)$

b) $(2+x)\cdot x\cdot(3x+1)$ e) $(x-1)\cdot\left(x^3-x^2-1\right)\cdot(x+2)$

c) $(x-1)\cdot x^2\cdot(x+2)$ f) $x\cdot\left(x^2+2x\right)\cdot\left(x^2-5x-1\right)$

1.4 › Sacar factor común de un polinomio

Sacar **factor común** transforma una suma en una multiplicación.

Para sacar factor común de un polinomio se buscan todos los factores que sean comunes a todos los términos y se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma: $ax + bx = x(a + b)$ (Ejemplo 19).

Ejemplo 19

- En el polinomio $3x^2 - 6x + 9$, los coeficientes de cada término son múltiplos de 3, por lo que el 3 es un factor común de todos los términos, de manera que:

$$3x^2 - 6x + 9 = 3(x^2 - 2x + 3)$$

- En el polinomio $2x^3 - 12x^2 + 8x$, los coeficientes de cada término son múltiplos de 2, por lo que el 2 es un factor común a todos los términos; además, todas las partes literales tienen x como factor, por lo que x es un factor común a todos los términos, de manera que:

$$2x^3 - 12x^2 + 8x = 2x(x^2 - 6x + 4)$$

Actividades

12. Copia en tu cuaderno estos polinomios y saca factor común si es posible:

a) $5x^3+10x^2+15$ b) x^3-x^2 c) $15x^4+85x^2$

13. De cada uno de los siguientes polinomios saca factor común si es posible:

a) $5(x-1)^2+(x-1)$ b) $-10x^3+15x^2+5$ c) x^4-2x^2

14. Dados los siguientes polinomios: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3$, $R(x) = 6x^2 + 2$, $S(x) = x - 1$, calcula:

a) $-Q(x)$
b) $P(x) + S(x)$
c) $Q(x) - R(x)$
d) $P(x) \cdot S(x)$
e) $P(x) - [Q(x) - R(x)]$
f) $P(x) - Q(x) - R(x)$
g) $P(x) - [Q(x) - S(x)]$
h) $R(x) - [P(x) \cdot S(x) + S(x)]$

Tareas por competencias

CCL CMCT CD CPAA CSC SIE CEC

Calculos con coeficientes

En un conservatorio se realiza la selección de alumnos a principio de curso. Para llevar a cabo dicha selección se procede de la siguiente manera:

- Los alumnos deben hacer primero una prueba de aptitud que se calificará de 0 a 10 puntos.
- Después, se aplica a cada aspirante un coeficiente corrector en función de su edad (tabla de coeficientes), que puedes ver a la derecha.
- Por último, se calcula la nota final que dará a los alumnos acceso a obtener una plaza en el conservatorio.

Coeficiente corrector por edad:

- Aspirantes de 7 a 10 años: 1.
- Aspirantes de 11 años: 0,90.
- Aspirantes de 12 años: 0,80.
- Aspirantes de 13 años: 0,70.
- Aspirantes de 14 años o más: 0,60.

a) Calcula la nota final de cada participante en la prueba de acceso del conservatorio:

Nombre y apellido	Fecha	Nota	Coeficiente corrector	Nota final
María López	2008	7	••••••	••••••
Ana Fernández	2005	8	••••••	••••••
Andrés Rubio	2004	10	••••••	••••••
Oscar Méndez	2007	9	••••••	••••••
Gabriela Vila	2006	9	••••••	••••••
Claudio García	2008	6	••••••	••••••

b) Ordena los aspirantes por nota final. Si solo hay 4 plazas, ¿quiénes serán los nuevos alumnos del conservatorio?

2 » Identidades notables

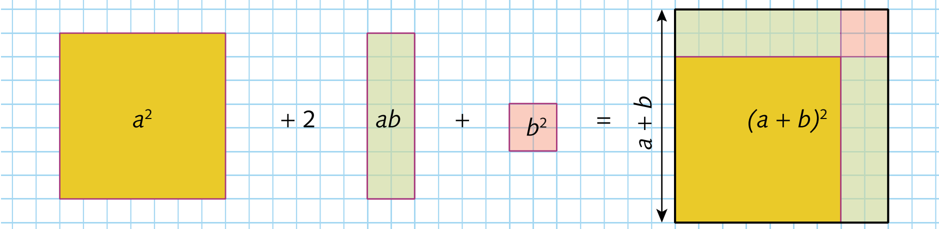
Hay tres productos de binomios que son importantes porque se pueden calcular sin necesidad de realizar su multiplicación y se conocen como **identidades notables,** llamadas también igualdades notables.

Cuadrado de la suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El cuadrado de la suma de a y b es igual al cuadrado de a, más el doble de a por b, más el cuadrado de b (Ejemplo 20).

Se puede comprobar multiplicando $(a + b)$ por $(a + b)$ o gráficamente:

Gráficamente



Operando

$$\begin{array}{r} a + b \\ \times \quad a + b \\ \hline ab + b^2 \\ + a^2 + ab \quad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Ejemplo **20**

Para calcular $(x+5)^2$ sin realizar la multiplicación se utiliza la igualdad $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ sustituyendo a por x y b por –5. Así:

$$\left(x+5\right)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2 = x^2+10x+25$$

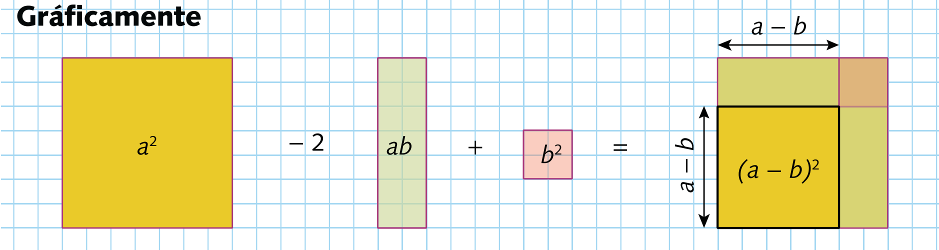
Comprobación: $\left(x+5\right)^2 = \left(x+5\right)\cdot\left(x+5\right) = x\cdot x+5\cdot x+5\cdot x+5\cdot 5 = x^2+10x+25$

Cuadrado de la diferencia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

El cuadrado de la diferencia de a y b es igual al cuadrado de a, menos el doble de a por b, más el cuadrado de b (Ejemplo 21).

Se puede comprobar multiplicando $(a - b)$ por $(a - b)$ o gráficamente:

Gráficamente



Operando

$$\begin{array}{r} a - b \\ \times \quad a - b \\ \hline - ab + b^2 \\ + a^2 - ab \quad \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Ejemplo **21**

Para calcular $(x-6)^2$ sin realizar la multiplicación se utiliza la igualdad $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ sustituyendo a por x y b por –6. Así:

$$\left(x-6\right)^2 = x^2-2\cdot x\cdot 6+6^2 = x^2-12x+36$$

Comprobación: $\left(x-6\right)^2 = \left(x-6\right)\cdot\left(x-6\right) = x\cdot x-6\cdot x-6\cdot x+6\cdot 6 = x^2-12x+36$

Suma por diferencia: $(a-b)^2 \cdot (a+b)^2 = a^2 - b^2$

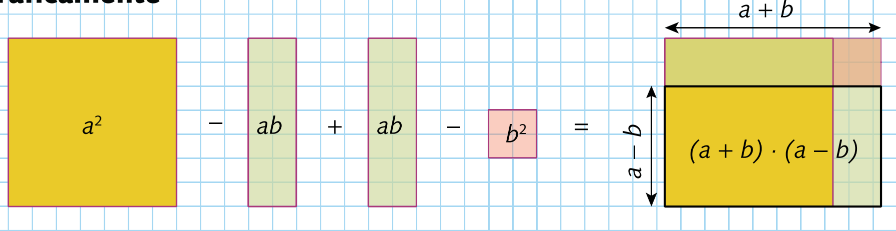
La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados (Ejemplo 22).

Se puede comprobar multiplicando $(a+b)$ por $(a-b)$ o gráficamente:

Operando

$$\begin{array}{rrrr} & & a & +\ b \\ & \times & a & -\ b \\ \hline & - & ab & -\ b^2 \\ +\ a^2 & + & ab & \\ \hline a^2 & + & & -\ b^2 \end{array}$$

Gráficamente



Ejemplo 22

Para calcular $(x-2)\cdot(x+2)$ sin realizar la multiplicación se utiliza la igualdad $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ sustituyendo a por x y b por 2. Así:

$$(x+2)\cdot(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

Comprobación: $(x+2)\cdot(x-2) = x\cdot x - 2\cdot x + 2\cdot x - 2\cdot 2 = x^2 - 4$

Las igualdades notables también se utilizan de derecha a izquierda, es decir, para transformar ciertos polinomios en productos (Ejemplo 23).

Ejemplo 23

- Para escribir el polinomio $4x^2 - 36x + 81$ como un producto, se buscan cuadrados. Como $4x^2 = (2x)^2$ y $81 = 9^2$:

$$4x^2 - 36x + 81 = (2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot(9) + (9)^2 = (2x-9)^2$$

- Para escribir el polinomio $x^2 + 10x + 25$ como un producto, se buscan cuadrados. Como se tiene x^2 y $25 = 5^2$:

$$x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2\cdot(x)\cdot(5) + (5)^2 = (x+5)^2$$

- Para escribir el polinomio $16x^2 - 25$ como un producto, se buscan cuadrados. Como $16x^2 = (4x)^2$ y $25 = 5^2$:

$$16x^2 - 25 = (4x)^2 - (5)^2 = (4x-5)\cdot(4x+5)$$

Actividades

15. Copia y calcula en tu cuaderno utilizando las identidades notables:

a) $(x+1)^2$
b) $(x-1)^2$
c) $(x+5)\cdot(x-5)$
d) $(2x-1)\cdot(2x-1)$
e) $(4+x)^2$
f) $(x-y)^2$
g) $(x+7y)\cdot(x-7y)$
h) $(3x+5)\cdot(3x+5)$

16. Copia en tu cuaderno y razona si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:

a) $x^2 - 10x + 10 = (x-10)$
b) $x^2 - 121 = (x+11)\cdot(x-11)$
c) $9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$
d) $x^2 - 2x + 1 = (x+1)^2$

Actividades

17. Copia y completa con el término que falta para que sea una igualdad notable:

a) $x^2 - 6x + \underline{\qquad}$
b) $16x^2 + \underline{\qquad} + 1$
c) $\underline{\qquad} + 18x + 100$
d) $4x^2 - 4x + \underline{\qquad}$

18. Copia y desarrolla haciendo uso de las igualdades notables.

a) $(x+3)^2$
b) $(1-x) \cdot (1+x)$
c) $(3x-1)^2$
d) $(4x-7) \cdot (4x+7)$
e) $(2a+b)^2$
f) $(5x-x^2)^2$

19. Copia, desarrolla y simplifica las siguientes expresiones.

a) $(3x+3)^2 - (3x-3)^2$
b) $(x-2)^2 - (x^2+4x+4)$
c) $6x^2 - (x-1)^2 + (2x+1)^2$

20. Raquel es profesora de 3.^{er} curso de ESO y mientras corregía un examen se encontró con la siguiente expresión: $(x+3)^2 = x^2 + 9$.

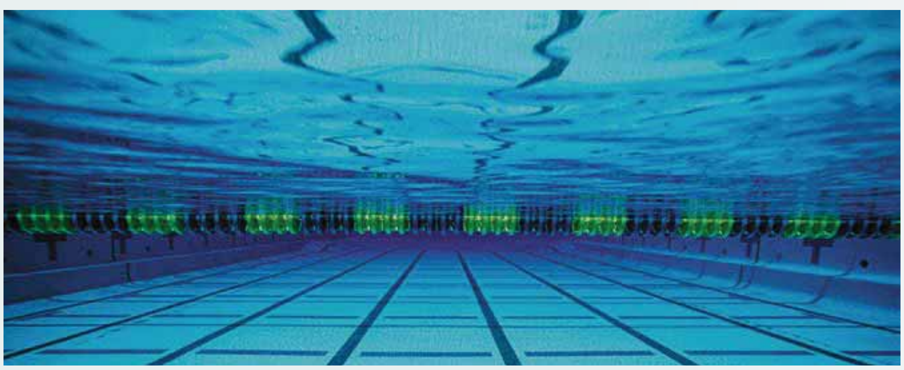
Razona por qué se trata de un grave error e indica cuál sería la expresión correcta.

Tareas por competencias

CCL CMCT CD CPAA CSC SIE CEC

Identidades notables y cálculo de superficies

El hotel Euroholiday ha decidido reformar su piscina, ya que el 80% de sus clientes considera que es muy pequeña para el elevado número de huéspedes que tiene el hotel.



a) Calcula la superficie que ocupa actualmente la piscina si cada uno de sus lados mide 7 m.
b) ¿Cuál sería el área de la nueva piscina si se decide mantenerle la forma y aumentarle la misma cantidad a lo largo y a lo ancho?
c) Realiza un dibujo de cómo quedaría la piscina una vez ampliada.
d) Elabora una tabla que nos permita calcular la superficie de la nueva piscina dependiendo del número de metros que se aumente.
e) Si la superficie máxima que puede ocupar la piscina son 256 m^2, ¿cuántos metros se debe aumentar por cada lado la piscina?

3 » División de polinomios

División euclídea

La división euclídea se puede escribir de distintas formas:

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \cline{2-2} \text{Resto} & \text{Cociente} \end{array}$$

Dividendo = divisor · cociente + resto

Ejemplo 24

Para dividir $4x^5-2x^4-6x^3+8x^4$ entre $2x^2$ se divide cada término del dividendo entre el divisor:

$$4x^5-2x^4-6x^3+8x^2:2x^2=$$
$$=\left(4x^5:2x^2\right)+\left(-2x^4:2x^2\right)+$$
$$+\left(-6x^3:2x^2\right)+\left(8x^2:2x^2\right)=$$
$$=2x^3-x^2-3x+4$$

Comprobación:

$$4x^5-2x^4-6x^3+8x^2=$$
$$=2x^2\cdot\left(2x^3-x^2-3x+4\right)$$

Si $P(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual que $Q(x)$, al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ se obtienen dos polinomios: el **polinomio cociente,** $C(x)$, y el **polinomio resto,** $R(x)$. Si $R(x)=0$, la división es exacta.

Para **comprobar** el **resultado de la división** $P(x):Q(x)$ hay que comprobar que se cumple esta relación.

Para **dividir** un **polinomio entre un monomio** se divide cada término del dividendo entre el divisor. Es una suma de cocientes de monomios (Ejemplo 24).

Para **dividir dos polinomios** $P(x)$ entre $Q(x)$ (Ejemplo 25):

– Se ordenan los términos de cada polinomio de mayor a menor y se aplica el algoritmo de la división de los números enteros, siendo $P(x)$ el dividendo y $Q(x)$ el divisor.
– El primer término del cociente es el resultado de dividir el primer término del dividendo entre el primero del divisor **(1.º)**.
– Se multiplica el término del cociente por el divisor y se coloca debajo del dividendo con signos contrarios y cada término debajo de su semejante **(2.º)**.
– De la suma de los polinomios se obtiene un polinomio de menor grado **(3.º)**.

Si el grado del polinomio obtenido es mayor que el grado del divisor, se continúa repitiendo los pasos anteriores **(4.º, 5.º, 6.º, 7.º, 8.º, 9.º, 10.º, 11.º, 12.º)**. Si el grado del polinomio obtenido es menor que el grado del divisor, se para el proceso y el último polinomio obtenido es el resto.

Ejemplo 25

Para dividir $3x^2-6x+9=3\left(x^2-2x+3\right)$

$$\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & x^5+ & 0x^4+ & 2x^3+ & 0x^2- & x- & 8 & x^2-2x+1 \\ \cline{8-8}
\textbf{2.º}\rightarrow & -x^5+ & 2x^4- & x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \cline{2-4}
\textbf{3.º}\rightarrow & & 2x^4+ & x^3+ & 0x^2- & x- & 8 & \textbf{1.º}\uparrow\ \textbf{4.º}\uparrow\ \textbf{7.º}\uparrow\ \textbf{10.º}\uparrow \\
\textbf{5.º}\rightarrow & & -2x^4+ & 4x^3- & 2x^2 & & & \\ \cline{3-5}
\textbf{6.º}\rightarrow & & & 5x^3- & 2x^2- & x- & 8 & \\
\textbf{8.º}\rightarrow & & & -5x^3+ & 10x^2- & 5x & & \\ \cline{4-6}
\textbf{9.º}\rightarrow & & & & 8x^2- & 6x- & 8 & \\
\textbf{11.º}\rightarrow & & & & 8x^2+ & 16x+ & 8 & \\ \cline{5-7}
\textbf{12.º}\rightarrow & & & & & 10x- & 16 &
\end{array}$$

1.º $x^5:x^2=x^3$
2.º $x^3\cdot(x^2-2x+1)=x^5-2x^4+x^3$
3.º $(x^5+2x^3-x-8)+(-x^5+2x^4-x^3)=2x^4+x^3-x-8$
4.º $2x^4:x^2=2x^2$ / **5.º** $2x^2\cdot(x^2-2x+1)=2x^4-4x^3+2x^2$
6.º $(2x^4+x^3-x-8)+(-2x^4+4x^3-2x^2)=5x^3-2x^2-x-8$
7.º $5x^3:x^2=5x$ / **8.º** $5x\cdot(x^2-2x+1)=5x^3-10x^2+5x$
9.º $(5x^3-2x^2-x-8)+(-5x^3+10x^2-5x)=8x^2-6x-8$
10.º $8x^2:x^2=8$ / **11.º** $8\cdot(x^2-2x+1)=8x^2-16x-8$
12.º $(8x^2-6x-8)+(-8x^2+16x+8)=10x-16$

Solución: $C(x)=x^3-2x^2+5x+8$ y $R(x)=10x-16$

Comprobación: $x^5+2x^3-x-8=\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(x^3+2x^2+5x+8\right)+\left(10x-16\right)$

Actividades

21. Copia y calcula en tu cuaderno estas divisiones entre monomios:

a) $\left(6x^3-2x^2+10x\right):\left(2x\right)$
b) $\left(7x^5-3x^4\right):\left(-x\right)$
c) $\left(8x^5+4x^3-6x^2\right):\left(2x^2\right)$
d) $\left(6x^6+12x^5-9x^4\right):\left(-3x^2\right)$

22. Copia en tu cuaderno y calcula estas divisiones de polinomios:

a) $\left(3x^4-3x^2+x-5\right):\left(x^2+3\right)$
b) $\left(4x^4-2x^2+3x-2\right):\left(2x^2+x-3\right)$

El resultado de dividir dos polinomios puede ser un polinomio o una expresión algebraica fraccionaria $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Una **expresión algebraica fraccionaria** es el cociente de dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$, siempre que el denominador no sea un polinomio constante ni nulo.
Además, el grado del dividendo, $P(x)$, tiene que ser menor que el grado del divisor, $Q(x)$ (Ejemplo 26).

Para **simplificar fracciones algebraicas** se puede proceder de dos formas diferentes:

– **Sacar factor común** en el numerador y denominador (Ejemplo 27).
– Usar **identidades notables** cuando el grado de los polinomios del numerador y del denominador es 2 (Ejemplo 28).

Ejemplo 27

▶ Para simplificar la fracción algebraica $\frac{15x+30}{10x^2+20x}$, se saca factor común en el numerador: $15x+30=15\cdot(x+2)$, y en el denominador: $10x^2+20x=10x(x+2)$, y se simplifica:

$$\frac{15x+30}{10x^2+20x}=\frac{15\cdot(x+2)}{10x\cdot(x+2)}=\frac{15}{10x}$$

Ojo al simplificar

En la fracción algebraica $\frac{3x+3}{3x+9}$ no se puede simplificar el 3 solamente en una parte del numerador y en el denominador. Es decir:

$$\frac{\cancel{3x}+3}{\cancel{3x}+9}\neq\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

La forma correcta es:

$$\frac{3x+3}{3x+9}=\frac{3(x+1)}{3(x+3)}=\frac{(x+1)}{(x+3)}$$

Ejemplo 26

▶ $\frac{28x^5}{7x^2}$ no es una fracción algebraica, porque al simplificar resulta el polinomio $4x^3$.

▶ $\frac{12x^5}{4x^8}$ es una fracción algebraica, porque al simplificar resulta $\frac{12x^5}{4x^8}=\frac{3}{x^3}$, donde el denominador no es constante ni nulo.

Ejemplo 28

▶ El denominador de la expresión $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ es la igualdad notable $(x+1)^2$ y el numerador es la igualdad notable $(x+1)\cdot(x-1)$, con lo cual:

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{x+1}$$

Actividades

23. Copia en tu cuaderno y razona si las siguientes expresiones son fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2+1}{x^5+3}$ b) $\left(x+\frac{1}{7}\right)^2$ c) $\frac{x^3-4}{2x^2+3}$ d) $\frac{x^3+1}{2x}$

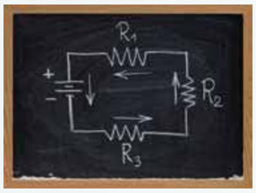
24. Copia en tu cuaderno y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2+12x}{9x+36}$ b) $\frac{x^3-6x^2}{4x^4+5x^2}$ c) $\frac{6-4x}{4x^2-9}$ d) $\frac{3x-6}{x^2-4}$

Tareas por competencias

CCL CMCT CD CPAA CSC SIE CEC

Leyes de física y expresiones algebraicas



Las leyes de la física verifican que si se conectan dos resistencias en paralelo R_1 y R_2, la resistencia total R_t se calcula mediante la siguiente expresión: $\frac{1}{R_t}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

a) Si ambas resistencias miden lo mismo, ¿qué expresión resultaría de la suma de $\frac{1}{R_1}$ y de $\frac{1}{R_2}$? ¿Esta suma es una expresión algebraica fraccionaria?

b) Si se conoce la superficie que ocupa una finca rectangular $a = 6x^2 + 13x + 5$ y el ancho de la finca $b = 2x + 1$, ¿se puede calcular su largo? ¿Es una expresión algebraica? ¿Se puede simplificar?

c) Investiga con ayuda de tus compañeros y elabora una lista con otras expresiones algebraicas utilizadas en la física o en otros campos científicos.

Calcular la dosis de medicamentos para niños

SOBREDOSIS CON MEDICAMENTOS EN EUSKADI

Pediatras alertan de intoxicaciones en bebés por errores de los padres en las dosis de paracetamol

Las hospitalizaciones se deben en la mayoría de los casos a **confusiones con la jeringuilla de 'Apiretal 60 ml.'**

Los niños son un grupo de pacientes con riesgo de padecer errores al administrar medicación. Ocho de cada 10 ingresos de menores en urgencias se deben a un exceso de paracetamol o ibuprofeno. Para calcular correctamente la dosis, hay que usar fórmulas matemáticas en las que intervienen factores como el peso del paciente y el tipo de administración de la medicina:

$$\text{Dosis pediátrica} = \frac{\text{peso niño (kg)} \cdot \text{dosis adulto}}{70}$$

También en Internet se pueden encontrar calculadoras *on line* específicas, como la del Portal de Salud de la Comunidad de Madrid.

Escanea el código QR para abrir la calculadora en tu móvil

También existen otras expresiones que permiten calcular la dosis a partir del peso y la altura del niño:

$$\text{Dosis pediátrica} = \frac{\text{peso niño} \cdot \text{altura niño}}{36\,000} \cdot \frac{\text{dosis adulto}}{1{,}73}$$

Material necesario para el cálculo de dosis de medicación:

- Una calculadora.
- Lápiz y papel.
- Peso del paciente.
- Medicamento.
- Indicaciones del médico.

Actividades

1. Si en adultos la dosis recomendada es de 600 mg cada 6 h, completa la tabla:

Edad	Peso (kg)	Altura (cm)	Dosis pediátrica (mg)
1 mes	4,2	55	
3 meses	5,6	59	
1 año	10	76	
3 años	15	94	
5 años	18	108	
7 años	23	120	
12 años	39	148	

2. La Agencia Europea del Medicamento considera que superar 2 400 mg al día de ibuprofeno puede ser peligroso para nuestra salud. Si Laura toma una dosis de 800 mg cada 6 h, ¿está actuando correctamente?

1. Expresa en lenguaje algebraico las siguientes situaciones:

a) Un empresario recorta los sueldos en un 8%.
b) El precio de un *pack* de 24 latas de refresco si cada lata cuesta 0,50 € y regalan una.
c) El precio de la hipoteca sube un 2%.
d) El coste de una mensualidad de teléfono si se paga un fijo de 12 € al mes y 0,05 € por llamada realizada, independientemente de su duración.

2. Realiza las siguientes sumas y restas de monomios:

a) $5x+x-9x+2x$

b) $5xy^2-4xy+3xy+xy^2$

c) $2x^3-\frac{x^3}{4}$

d) $-5x^3-\left(6x^3+3x^3\right)+x^3$

e) $\left(\frac{2}{5}x^4-3x^4\right)-\left(\frac{x^4}{5}+4x^4\right)$

f) $\left(-x+5x^3+3x^4\right)-\left(-x+2x^2-x^3+x^4\right)$

g) $5a^2b-\frac{2}{3}a^2b-a^2b-2a^2b$

h) $-\left(3ab^3+a^2b\right)-3a^3b+4ab^3-\left(a^3b-2ab^3\right)$

3. Efectúa los siguientes productos y cocientes de monomios:

a) $3x^4\cdot 2x^3$

b) $-x^3\cdot\frac{2}{3}x^3$

c) $7x^2\cdot(-4)x^3$

d) $(-4)x^2\cdot(-2)x^4$

e) $12x^6:3x^2$

f) $\left(-49x^9\right):7x^3$

g) $\frac{-6x^7y^5}{2x^2y^4}$

h) $\frac{4x^8y^5\cdot(-xy)}{2x^3y^6}$

4. Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor indicado de la variable x:

a) $P(x)=4x^2-8x+2$ para $x=-1$

b) $P(x)=-x^3-x^2+3$ para $x=2$

c) $P(x)=\frac{x^3}{2}-x^2-3$ para $x=-2$

5. Efectúa las siguientes operaciones para los polinomios: $P(x)=x^3-3x^2+6x-2$, $Q(x)=-x^4+5x^3+3x^2+4$, $R(x)=2x-3$.

a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $Q(x)-R(x)$

d) $Q(x)-\left[P(x)-R(x)\right]$

6. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3x^2\cdot\left(2x^4-4x^3+x-5\right)$

b) $\left(3x^2-2\right)\cdot\left(x^3-x^2+2x-1\right)$

c) $\left(x^2+2x-1\right)\cdot\left(-x^2+3x-2\right)$

d) $(4x^5-x^2)\cdot(10x^3-6x^4)$

e) $(33x^6+x^3-x^2)\cdot(2x^4)$

7. Extrae el factor o factores comunes en los siguientes polinomios:

a) $12x^3+6x^2-9x$

b) $-12x^3-20x^4+4x^2$

c) $6\left(x-2\right)-18\left(x-2\right)^2$

d) $30x^7+6x^5-100x^3$

e) $(33x^6+3)+3(x^6+1)$

8. Desarrolla las siguientes identidades notables y simplifica:

a) $\left(3x+2\right)^2$

b) $\left(5x-4\right)^2$

c) $\left(4x-1\right)\cdot\left(4x+1\right)$

d) $\left(x-2\right)^2+\left(3x+1\right)^2$

e) $2(x^2+3)^2+(x-4)$

9. Efectúa estas divisiones y comprueba el resultado mediante la regla $D=d\cdot c+r$:

a) $\left(2x^4-5x^3+4x^2+3x+6\right):\left(x-3\right)$

b) $\left(x^4-7x^3+8x^2-4\right):\left(x-2\right)$

c) $\left(2x^4+5x^3-4x^2+x-18\right):\left(x+2\right)$

d) $\left(x^3+2x^2+3x+1\right):\left(x-1\right)$

e) $(x^4+2x^3-x^2-2x+1):(x^2+x+1)$

10. Efectúa las siguientes divisiones de polinomios y comprueba el resultado mediante la regla $D=d\cdot c+r$:

a) $\left(2x^3-3x^2+4x-3\right):\left(x^2-1\right)$

b) $\left(8x^3-4x^2+x+15\right):\left(2x^2+x-1\right)$

c) $\left(x^4-x^3+7x^2+x+15\right):\left(x^2+2\right)$

d) $\left(6x^6-2x^5-11x^4+3x^3+18x^2-5x-5\right):\left(2x^4-3x^2+5\right)$

e) $(4x^3-2x^2-32x+7):(x-3)$

11. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas sacando factor común o utilizando identidades notables:

a) $\frac{x-3}{x^2-9}$

b) $\frac{x^3+x^2}{x^2+2x+1}$

c) $\frac{x^2-25}{x^2+25-10x}$

d) $\frac{x^2-7}{x^3-7x}$

IDEAS CLAVE Y AUTOEVALUACIÓN

Expresión algebraica

- Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y operaciones matemáticas básicas suma, la resta, la multiplicación y la división.

Monomios

- Un monomio es la expresión algebraica más sencilla. Formada por una parte numérica, **coeficiente,** y por una **parte literal.** El **grado** de un monomio es la suma de todos los exponentes de su parte literal. $5xy$ es un monomio de grado 2, coeficiente 5 y parte literal xy
- El **valor numérico** de un monomio se obtiene reemplazando las letras por números y operando. El valor numérico de $3 \cdot x^2$, para $x = 4$, es: $3 \cdot 42 = 48$
- Para **sumar o restar monomios** se suman o restan los coeficientes de monomios semejantes. $5x^2 - 4x^2 = x^2$
- Para **multiplicar monomios** se multiplican los coeficientes y las partes literales. $2x^3 \cdot 6x = 12x^4$
- Para **dividir monomios** se dividen los coeficientes y las partes literales. $24x^3 : 3x = \dfrac{24x^3}{3x} = 8x^2$

Polinomios

Un **polinomio,** ***P*(*x*),** está formado por la suma de varios monomios llamados **términos** del polinomio. El coeficiente del término de mayor grado es el **coeficiente principal,** y el de menor grado, el **término independiente.** El **grado** de un polinomio es el mayor exponente de la variable x con coeficiente distinto de cero. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 5$ es un polinomio de 3 términos, de grado 3, coeficiente principal 1 y el termino independiente 5

- El **valor numérico** de un polinomio es el valor obtenido al sustituir la variable x por un número. Si $P(x) = 2x - 7$, el valor numérico para $x = -2$ es: $P(-2) = 2 \cdot (-2) - 7 = -11$

Operaciones con polinomios

- Para **sumar o restar polinomios** se agrupan los términos semejantes de ambos polinomios y se suman o restan. Si $P(x) = x^2 + 3$ y $Q(x) = 3x^2 + x - 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow P(x) + Q(x) = (1 + 3)x^2 + x + (3 - 3) = 4x^2 + x$
- Para **multiplicar** el polinomio $P(x)$ por el polinomio $Q(x)$ se multiplica cada uno de los términos de $P(x)$ por todos los términos de $Q(x)$. Después se reducen los términos semejantes. Si $P(x) = 4x^2 + 3$ y $Q(x) = 3x^2 + x - 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow P(x) \cdot Q(x) = 4x^2 \cdot (3x^2 + x - 2) + 3 \cdot (3x^2 + x - 2) = 12x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x - 6$
- Para **sacar factor común** en un **polinomio** se buscan todos los factores comunes a todos los términos y se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma: $ax + bx = x(a + b)$. $3x + 4x = x(3 + 4)$ el factor común es x
- Para **dividir** un **polinomio entre un monomio,** se divide cada termino del dividendo entre el divisor. $6x^5 - 9x^3 : 3x^2 = (6x^5 : 3x^2) + (-9x^3 : 3x^2) = 2x^3 - 3x$
- Para **comprobar** el **resultado de la división** $P(x) : Q(x)$ hay que comprobar que se cumple esta relación: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

Identidades notables

- **Cuadrado de la suma:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

  $(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = x^2 + 8x + 16$
- **Cuadrado de la diferencia:** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

  $(x - 4)^2 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- **Suma por diferencia:** $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

  $(x + 4) \cdot (x - 4) = x^2 - 16$

1. ¿Cuál de estos polinomios es completo?

a) $7x^3 + 9x^2 - x + 3$ c) $2x^3 + 2x^2 - 2x$
b) $7x^3 + x + 3$ d) $4x^3 + 8x^2 - 7$

2. El valor numérico del polinomio $2x^3 + x^2 - 5$ para $x = -2$ es:

a) -15 b) -17 c) 12 d) 17

3. Sean $P(x) = 5x^3 + 2x - 1$ y $Q(x) = -x^2 + 6x - 7$ su suma es:

a) $5x^3 - x^2 + 8x - 8$ c) $5x^3 - x^2 - 8x - 8$
b) $5x^3 - 2x^2 - 8x - 8$ d) $5x^3 - x^2 + 4x + 6$

4. ¿Cuál de los siguientes productos de polinomios tiene un resultado diferente?

a) $(x^2 - 1) \cdot (x - 2)$ c) $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x)$
b) $(x - 1) \cdot (x^2 - 3x)$ d) $(x - 2) \cdot (x^2 - 1)$

5. Indica a qué polinomio no se le puede sacar factor común.

a) $x^6 + x$ b) $5x^5 + 2x^2 + 6x$ c) $3x^2 + 4x - 7$ d) $x^8 - 3$

6. ¿Qué expresión corresponde con el polinomio $x^2 + 20x + 25$?

a) $(x + 5)^2$ b) $(2x + 5)^2$ c) $(x - 5)^2$ d) $(x + 20)^2$

7. Dada la expresión $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) Si $R(x) = 0$ entonces $P(x) : Q(x) = C(x)$.
b) Si $R(x) = 0$ entonces la división es exacta.
c) El grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

8. ¿Cuál de estas expresiones no es una expresión algebraica fraccionaria?

a) $\dfrac{x^7 + 7}{x^5 - 3}$ b) $\dfrac{5x^5}{x^6 + 22}$ c) $\dfrac{x + x^2}{x^5}$ d) $\left(\dfrac{2}{-3} + x^7\right)^3$